

**Министерство образования Российской Федерации  
УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к лабораторной работе № 4  
по курсу общей физики**

**Уфа 2004**

Министерство образования Российской Федерации  
УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра общей физики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторной работе № 4  
по курсу общей физики

Уфа 2004

Составитель Л.В. Рабчук

УДК 531.231 (07)

ББК 22.365 (Я7)

Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний: Методические указания к лабораторной работе № 4 по курсу общей физики /Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост. Л.В. Рабчук. – Уфа, 2004. – 11 с.

В работе определяются моменты инерции твердых тел относительно различных осей, сравниваются их экспериментально определенные и теоретически рассчитанные значения.

Предназначены для студентов университета, изучающих курс общей физики.

Табл. 2. Ил.4. Библиогр.: 3 назв.

Рецензенты: Осипов В.С.,  
Иванов М.П.

© Уфимский государственный  
авиационный технический университет, 2004

Составитель РАБЧУК Людмила Васильевна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторной работе № 4  
по курсу общей физики

Подписано к печати 05.04.2004. Формат 60 x 84 1/16.

Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman Cyr.

Усл. печ. л. 0,7. Усл. – кр. – отт. 0,7. Уч–изд.л. 0,6.

Тираж 300 экз. Заказ №

Уфимский государственный авиационный технический университет

Редакционно-издательский отдел УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уфимский государственный авиационный технический университет»**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Методические указания  
к лабораторной работе № 4  
по дисциплине «Физика»**

**Уфа 2013**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Кафедра физики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания  
к лабораторной работе № 4  
по дисциплине «Физика»

Уфа 2013

Составитель Л.В. Рабчук

УДК 534-14 (07)

ББК 22.365 (Я7)

Методические указания к лабораторной работе № 4 по дисциплине «Физика» «Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний» /Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост. Л.В. Рабчук. – Уфа, 2013, – 13 с.

В работе определяются моменты инерции твердого тела относительно различных осей методом крутильных колебаний, сравниваются их экспериментально получаемые и теоретически рассчитываемые значения.

В методических указаниях рассмотрены понятия момента инерции материальной точки и тела относительно оси, теорема Штейнера, изложена методика выполнения заданий и указана форма отчетности.

Предназначены для студентов, изучающих дисциплину «Физика» в технических вузах.

Ил. 6. Табл. 2. Библиогр.: 3 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Осипов В.С.,  
доктор тех. наук, профессор Водопьянов В.В.

© Уфимский государственный  
авиационный технический университет, 2013

## Содержание

Введение .....	4
1. Цель работы.....	4
2. Задачи.....	4
3. Теоретическая часть .....	4
3.1. Момент инерции. Теорема Штейнера .....	4
3.2. Метод крутильных колебаний.....	7
5. Требования по технике безопасности .....	10
6. Задания.....	10
7. Методика выполнения заданий .....	10
7.1. Измерение момента инерции рамки относительно оси .....	10
7.2. Измерение момента инерции тела в зависимости от распределения его массы в пространстве относительно оси.....	11
8. Контрольные вопросы .....	12
9. Требования к содержанию и оформлению отчета .....	12
10. Критерии результативности выполнения лабораторной работы....	13
Список литературы .....	13



# Лабораторная работа № 4

## Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний

### Введение

Мерой инертности тела при поступательном движении является масса. Инертность тел при вращательном движении зависит не только от массы, но и от ее распределения в пространстве относительно оси вращения. Мерой инертности при вращательном движении служит момент инерции тела относительно оси. При этом тело обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, независимо от того вращается оно или покоится.

### 1. Цель работы

Определение момента инерции тела относительно различных осей методом крутильных колебаний.

### 2. Задачи

1. Закрепление студентами понятия момента инерции тела относительно оси, исследование его зависимости от массы тела и ее распределения относительно оси.

2. Сравнение экспериментально полученных и теоретически рассчитанных значений момента инерции тела относительно оси.

### 3. Теоретическая часть

#### 3.1. Момент инерции. Теорема Штейнера

Моментом инерции материальной точки относительно оси называют величину

$$J_i = m_i \cdot r_i^2, \quad (3.1)$$

где  $m_i$  – масса материальной точки,  $r_i$  – расстояние от материальной точки до оси.

Моментом инерции тела относительно оси называют сумму моментов инерции материальных точек, составляющих тело

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2. \quad (3.2)$$

Момент инерции твердого тела относительно интересующей оси, как

следует из (3.2), является величиной аддитивной, то есть момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции этих тел.

Представляя тело состоящим из сколь угодно малых частей объемом  $dV$  и массой  $dm$  и полагая массу непрерывно распределенной, его момент инерции относительно данной оси можно найти интегрированием

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (3.3)$$

где  $\rho$  – плотность вещества тела.

Рассчитаем момент инерции тонкого однородного стержня массой  $m$  и длиной  $l$  относительно оси  $OY$ , перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (рис. 3.1). Разобьем стержень на элементы массой  $dm$  и длиной  $dx$ . Момент инерции произвольно выбранного элемента с координатой  $x$  относительно оси  $OY$  равен

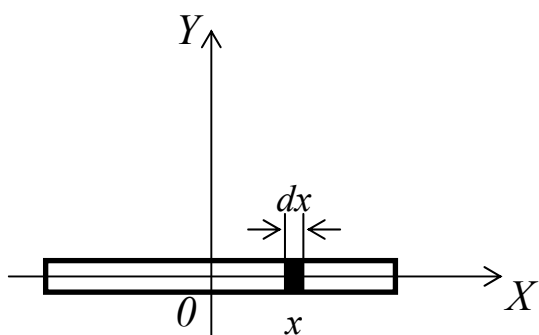


Рис. 3.1

равен

$$dJ = x^2 dm = x^2 \frac{m}{l} dx, \quad (3.4)$$

а момент инерции всего стержня относительно этой оси будет равен

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3.5)$$

Момент инерции тонкой однородной пластины прямоугольной формы массой  $m$ , длиной  $b$  и шириной  $c$  относительно оси  $OZ$ , проходящей через ее центр масс (рис. 3.2), можно рассчитать, представив ее в виде совокупности тонких стержней массой  $dm$  и длиной  $b$ . Момент инерции  $dJ$  любого такого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину согласно (3.5) равен  $dJ = \frac{1}{12} b^2 dm$ , а момент инерции всей пластины относительно взятой оси  $OZ$

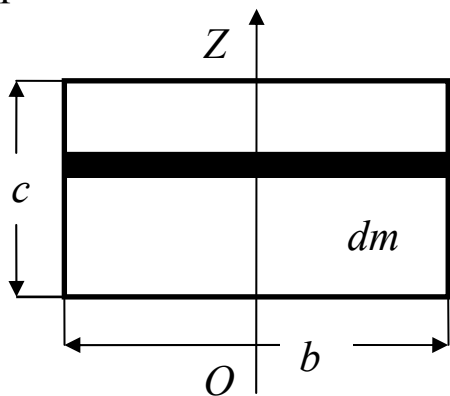


Рис. 3.2

$$J = \int dJ = \int_0^m \frac{1}{12} b^2 dm = \frac{1}{12} m b^2. \quad (3.6)$$

Вычислим теперь момент инерции однородного сплошного параллелепипеда относительно оси симметрии  $OZ$  (рис. 3.3). Разобьем его на параллельные пластины равной массы  $dm$ , толщиной  $dy$  со сторонами  $b$  и  $c$ .

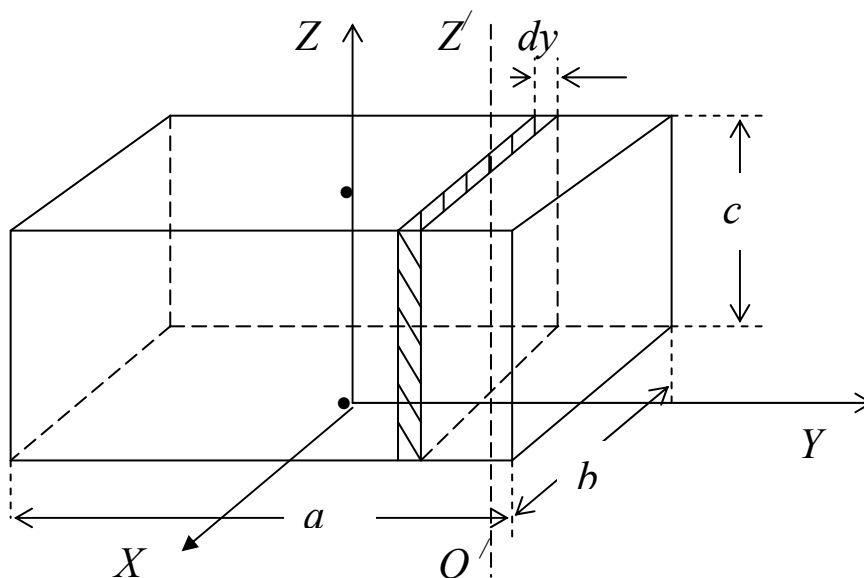


Рис. 3.3

Момент инерции  $dJ_1$  пластины, положение которой задается координатой  $y$  относительно вертикальной оси  $O'Z'$ , равен

$$dJ_1 = \frac{1}{12} b^2 dm. \quad (3.7)$$

Ее момент инерции  $dJ$  относительно оси  $OZ$  найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера, согласно которой момент инерции  $J$  тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_c$  тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями

$$J = J_c + m d^2. \quad (3.8)$$

По этой теореме

$$dJ = \frac{1}{12} dm \cdot b^2 + dm \cdot y^2 = dm \left( \frac{b^2}{12} + y^2 \right) = \frac{m}{a} \cdot dy \left( \frac{b^2}{12} + y^2 \right). \quad (3.9)$$

Момент инерции параллелепипеда относительно оси  $OZ$  равен

$$J = \int dJ = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{m}{a} \left( \frac{b^2}{12} + y^2 \right) dy = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a} \left( \frac{b^2}{12} + y^2 \right) dy = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2), \quad (3.10)$$

где  $a$  и  $b$  – длины сторон параллелепипеда, расположенные в плоскости  $XOY$ ,  $m$  – масса параллелепипеда.

### 3.2. Метод крутильных колебаний

В настоящей работе моменты инерции тела определяются с помощью крутильных колебаний. При повороте рамки, закрепленной на натянутой проволоке, происходит закручивание проволоки (рис. 3.4).

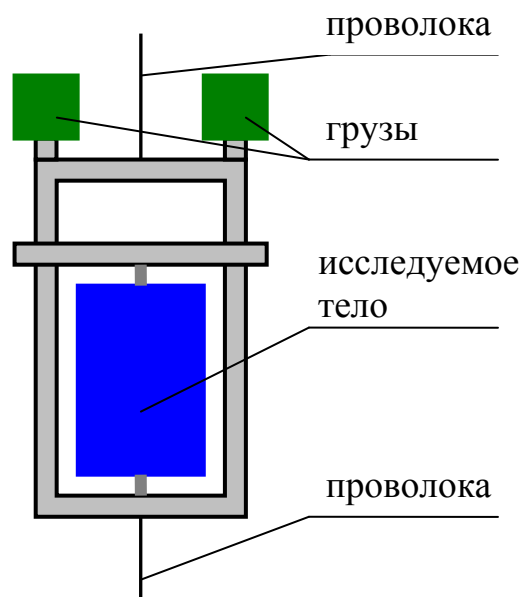


Рис. 3.4

Возникающие при этом силы упругости стремятся вернуть рамку в исходное положение. Величина  $M$  момента возвращающей силы при малом угле  $\varphi$  поворота рамки будет пропорциональна ему

$$M = D \cdot \varphi, \quad (3.11)$$

где  $D$  – коэффициент, называемый модулем кручения проволоки. Величина  $D$  зависит от длины проволоки, ее диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки.

По основному закону динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела,  $J$  – его момент инерции относительно оси вращения.

Из (3.11) и (3.12) получается дифференциальное уравнение незатухающих гармонических колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0, \quad (3.13)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ .

Решением уравнения (3.13) является функция  $\varphi(t)$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.14)$$

Таким образом, угол  $\varphi$  изменяется по гармоническому закону с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (3.15)$$

Период колебания  $T_p$  пустой рамки с моментом инерции  $J_p$  относительно оси ее вращения равен

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{J_p}{D}}. \quad (3.16)$$

а период  $T_1$  колебаний системы, состоящий из рамки с установленными на нее грузами с суммарным моментом инерции  $J_0$  относительно оси вращения

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_p + J_0}{D}}. \quad (3.17)$$

Исключая из (3.16) и (3.17)  $D$ , получаем формулу для расчета момента инерции  $J_p$  рамки

$$J_p = J_0 \cdot \frac{T_p^2}{T_1^2 - T_p^2}. \quad (3.18)$$

Если вместо грузов в рамке установить другое тело, то при известном значении  $J_0$  период  $T_2$  колебаний этой системы будет равен

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_p + J}{D}}, \quad (3.19)$$

где  $J$  - момент инерции тела.

Решая систему уравнений (3.17) и (3.19) исключением  $D$ , получаем формулу для расчета момента инерции  $J$  установленного тела относительно оси его вращения

$$J = J_p \left( \frac{T_2^2}{T_p^2} - 1 \right). \quad (3.20)$$

С учетом (3.18)

$$J = J_0 \cdot \frac{T_2^2 - T_p^2}{T_1^2 - T_p^2}. \quad (3.21)$$

#### 4. Экспериментальная установка

- установка (рис. 4.1.);
- набор тел (два сплошных цилиндра, параллелепипед, куб).

Основание установки оснащено регулируемыми ножками, которые позволяют производить выравнивание прибора. На основании закреплен штатив, к которому крепятся неподвижные кронштейны. Между верхним и нижним кронштейном на двух натянутых проволоках закреплена рамка. Два сплошных цилиндра с известным значением момента инерции устанавливаются на верхние штыри, выступающие из рамки. Исследуемое тело (параллелепипед или куб) жестко закрепляют в рамке крутильного маятника между ее основанием и параллельной скользящей переключателем с помощью ввернутого в нее винта.

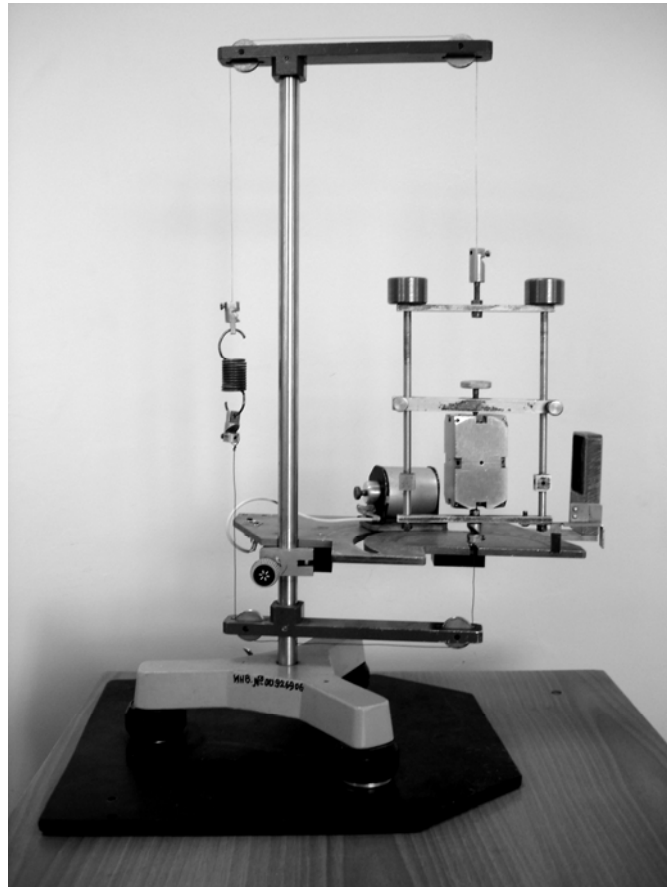


Рис. 4.1

## 5. Требования по технике безопасности

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданиями и лабораторной установкой.
2. Обязательно проверьте надежность закрепления тела.
3. По окончании работы уберите из рамки тело, приведите в порядок свое рабочее место.

## 6. Задания

1. Измерение момента инерции рамки относительно оси симметрии.
2. Измерение момента инерции тела в зависимости от распределения его массы в пространстве относительно выбранной оси.

## 7. Методика выполнения заданий

### 7.1. Измерение момента инерции рамки относительно оси

1. Повернув рамку на 5-10 градусов, измерить длительность времени  $t$ , за которое рамка совершает  $N = 20$  полных колебаний. Опыт повторить еще два раза. Рассчитать среднее время  $t_{\text{ср}}$  двадцати колебаний рамки и период колебаний  $T_p$  рамки

$$T_p = \frac{t_{\text{ср}}}{N}. \quad (7.1)$$

2. Установить два цилиндра на рамку. Три раза определить время  $t_1$  двадцати полных колебаний рамки с цилиндрами. По среднему времени определить период колебаний  $T_1$  рамки с цилиндрами

$$T_1 = \frac{t_{\text{ср}1}}{N}. \quad (7.2)$$

3. Определить момент инерции рамки  $J_p$  по формуле (3.18), где  $J_0 = 2 m \left( \frac{r^2}{2} + l^2 \right)$  ( $m = 0,106$  кг – масса одного цилиндра;  $r = 0,015$  м – радиус цилиндра;  $l = 0,052$  м – расстояние от оси вращения рамки до оси цилиндра).

4. Рассчитать относительную  $\delta J_p$  и абсолютную  $\Delta J_p$  погрешности измерения момента инерции рамки  $J_p$  относительно оси.

5. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	$t, c$	$t_{cp}, c$	$T, c$	$t_1, c$	$t_{1 cp}, c$	$T_1, c$	$J_0, кг \cdot м^2$	$J_p, кг \cdot м^2$	$\Delta J_p, кг \cdot м^2$	$\delta J_p, \%$
1										
2										
3										

## 7.2. Измерение момента инерции тела в зависимости от распределения его массы в пространстве относительно оси

1. Снять грузы, установить параллелепипед или куб (по указанию преподавателя) в рамке и закрепить специальными винтами так, чтобы острия винтов входили в углубления на образце вдоль оси (рис. 7.1).

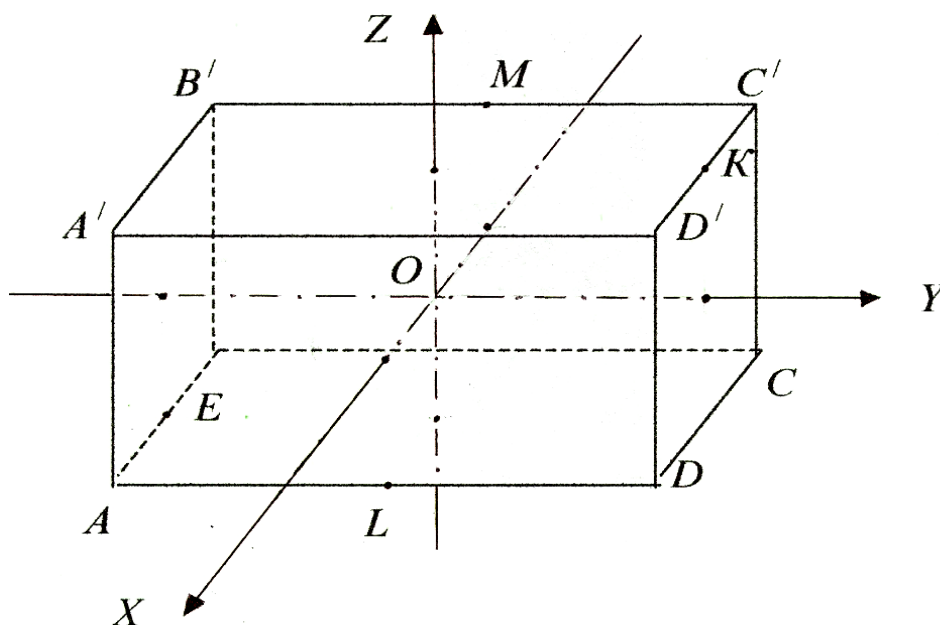


Рис. 7.1

2. Три раза определить время  $t_2$  двадцати полных колебаний рамки с образцом и по среднему времени  $t_{cp2}$  рассчитать период колебаний  $T_2$  системы

$$T_2 = \frac{t_{cp2}}{N}. \quad (7.3)$$

3. Определить момент инерции исследуемого тела по формуле (3.21).

4. Выполнить п.п. 2 и 3 еще для двух из указанных на рис. 7.1 осей (по указанию преподавателя) и сравнить моменты инерции образца относительно различных осей.

5. Рассчитать относительную и абсолютную погрешности измерения момента инерции образца  $J$  относительно одной оси.



6. Вычислите теоретическое значение момента инерции образца  $J$  относительно тех осей, которые брались при измерениях и сравните их с экспериментально определенными значениями моментов инерции.

7. Результаты всех измерений и расчетов занести в табл. 2.

Таблица 2

Ось	№ опыта	$t_2, \text{с}$	$t_{2 \text{ ср}}$	$T_2, \text{с}$	$J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\delta J, \%$
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						

### 8. Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции материальной точки относительно оси?
2. Что называют моментом инерции тела относительно оси?
3. Каков физический смысл момента инерции?
4. В чем суть теоремы Штейнера?
5. Что утверждает основной закон динамики вращательного движения?
6. Какие колебания совершает рамка при малых углах поворота? Как записывается дифференциальное уравнение таких колебаний? Как изменяется со временем угол поворота?
7. Как рассчитать момент инерции однородного параллелепипеда относительно различных осей симметрии?

### 9. Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель работы.
2. Теоретическую основу метода определения момента инерции тел, используемого в работе.
3. Схему установки.
4. Данные измерений времен колебаний пустой рамки, рамки с

грузами и рамки с исследуемым образцом.

5. Расчет периодов колебаний, моментов инерции пустой рамки, грузов и исследуемого тела при трех его различных положениях относительно оси вращения, расчет относительной и абсолютной погрешности определения момента инерции тела относительно одной из осей.

6. Выводы по результатам проделанной работы.

### **10. Критерии результативности выполнения лабораторной работы**

1. Знание понятий момента инерции материальной точки и тела относительно оси, физического смысла момента инерции, теоремы Штейнера, основного закона динамики вращательного движения и физической основы метода крутильных колебаний.

2. Качество выполнения экспериментальной и расчетной частей работы.

3. Соответствие отчета предъявленным требованиям.

### **Список литературы**

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2011.

2. *Детлаф А. Н., Яворский Б.М.* Курс физики. – М.: Academia, 2009.

3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2010.

Составитель РАБЧУК Людмила Васильевна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторной работе № 4  
по дисциплине «Физика»

Подписано в печать 2013. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная.

Печать плоская. Гарнитура Times New Roman Cyr.

Усл. печ. л. 0,7. Усл. – кр. – отт. 0,7. Уч–изд.л. 0,6.

Тираж экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный  
технический университет

Редакционно-издательский комплекс УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12